*Jens Mammen*

# Om matematik og psykologi.

## - Eller noter om matematik, intuition og virkeligheden (bl.a. hundestejler)

Forskel mellem Geometriens Aand [esprit de géométrie] og Anskuelsens Aand [esprit de finesse]: *... men hvad der gør, at Geometere ikke kan anskue, er at de ikke opfatter, hvad der ligger lige for deres Næse, og at de, fordi de er vante til Geometriens tydelige og grove Grundsætninger og til ikke at ræsonnere uden nøje at have betragtet og vejet disse, løber sur indenfor Anskuelsens Verden, hvor Principperne ikke lader sig behandle paa denne Maade. ... det [principperne] er noget til den Grad fint og mangfoldigt, at der skal en meget fin og skarp Opfattelse til for at føle det og til at danne rigtige og klare Meninger i Overensstemmelse med denne Følelse, uden at man i Reglen kan føre Beviser derfor i Orden og Rækkefølge saaledes som i Geometrien; man har nemlig ikke her Principperne saaledes paa rede Haand, og det vilde være et uendeligt Foretagende at forsøge derpaa. Tingene maa opfattes under eet i et enkelt Glimt og ikke gennem en fremadskridende Tankeslutning, i hvert Fald til en vis Grad ikke. ... thi Geometere vil gaa geometrisk frem indenfor Anskuelsens Verden, og de gør sig latterlige, ... Tanken ... gør det i Stilhed, af sig selv og uden teknisk Apparat;* *(Pascal, ca. 1660).*

I ovenstående citat udtrykker Pascal (1974, s. 28-29) en modsætning mellem den matematiske og den mere intuitive erkendelse. At de to erkendeformer kan forenes i samme person, er Pascal selv et vidnesbyrd om. Men derfor kan han jo godt have ret i, at den matematiske erkendelse er grov og primitiv i forhold til den intuitive.

Pascal-citatet (i engelsk udgave) er brugt som motto for Hubert Dreyfus' »What computers can't do« (Dreyfus, 1979), hvori Dreyfus demonstrerer, hvordan væsentlige sider af tilværelsen ikke kan forstås ud fra visse særligt »grove« former for anvendt matematik, nemlig en endelig kombinatorik, som den der ligger til grund for digitale computere, og at projektet at få disse maskiner til at udfolde »kunstig intelligens« er dødfødt.

Måske kan man, som nogle matematiske logikere gør det, argumentere for, at al matematik i en vis forstand ejer den samme »grovhed«, bundet som den er af at blive defineret af et endeligt alfabet. (For en diskussion heraf se f.eks. Arbib, 1964, og Crossley *et al.*, 1972).

For mange psykologer vil det ikke være det primitive og grove ved matematikken, der for dem er årsag til en kløft mellem matematik og intuition, men snarere matematikkens utilgængelighed og kompleksitet i forhold til en ofte simplere og umiddelbart givet virkelighed. De ville også snarere sige, at matematikken med sine muligheder for ubegrænset fin måling repræsenterer en helt urealistisk, irrelevant og overdreven akkuratesse i forhold til en mere »grov« og kvalitativ omverdenskendelse.

Dette kan syne som et paradoks. For at opløse det kan vi måske se på andre tilfælde, hvor der ingen kløft er mellem matematikken og intuitionen.

Hvis vi skal tilså en fodboldbane og ved, hvor lang og bred den er, og ved, hvor mange kg græsfrø der skal bruges pr. arealenhed, fortæller matematikken os helt uproblematisk, hvor mange kg frø der skal bruges. Det var måske mere, end vi havde troet, umiddelbart, og vi lader os måske belære, men vi føler vel, hverken at matematikken har gjort vold på os, eller at vores umiddelbare forestilling beviser matematikkens uanvendelighed.

Og hvorfor ikke? Naturligvis fordi de matematiske operationer: målingerne af længde og bredde, vejningen af græsfrøet, og de nødvendige regneoperationer, er meningsfulde og troværdige afbildninger af forhold i omverden.

Anvendelsen af matematikken er forankret i vores praktiske virkelighed.

Kløften består altså ikke mellem matematikken som sådan og virkeligheden. Derimod består der, som vi skal se, en kløft imellem virkeligheden og forsøg på matematisk beskrivelse af denne virkelighed, hvor de matematiske operationer ikke selv er praktisk og begrebsmæssigt forankret i den samme virkelighed, som den, der skal beskrives.

I eksemplet med »computermatematikken« og virkeligheden er det faktisk ikke matematikkens »endelighed« eller »ufuldstændighed« eller andre utilstrækkeligheder, der er problemet, men derimod, at den matematik eller kombinatorik, der ligger til grund for computerens funktion, ikke er forankret i andet end computerens læse- og skriveenheder. Kløften her består i svælget mellem virkeligheden på den ene side og så computerens tastatur på den anden side, og ikke mellem matematikken som sådan og virkeligheden. Matematikken afbilder bare ikke virkeligheden, hvis tastaturet ikke gør det. Computeren kan ikke selv udfolde menneskelig intelligens, fordi den simpelt hen ikke selv kan komme *i kontakt* med den virkelighed, hvori mennesket udfolder sin intelligens.

Den mangler menneskets begreber, krop og praksis. (Se også Mammen, 1985).

Hvis derimod en bruger af computeren *selv* praktisk har forankret matematikken i virkeligheden, så kan han bruge computeren som *redskab* til sine beregninger, så kan han udfolde »computerstøttet intelligens«.

I det andet eksempel med den »overdrevne« måling osv., er problemet selvfølgelig også, at selve de *operationer*, der f.eks. fører frem til en intelligenskvotient med to decimaler, eller som klasker alle, der har sagt »ja« til et spørgsmål på et spørgeskema, sammen og tæller dem op, ikke uden videre afbilder noget reelt i omverdenen (jfr. Hem, 1980, bind I kap. III).

Der er altså ingen kløft mellem matematikken som sådan og virkeligheden, og heller ikke mellem matematikken og andre erkendeformer, f.eks. intuitionen eller perceptionen, selv om der selvfølgelig ikke er tale om et sammenfald, heller. (Se f.eks. den matematikhistoriske diskussion heraf hos Dantzig, 1964, og hos Klix, 1980, s. 250-56.)

Men der er en kløft mellem beskrivelser, der henter deres begreber, deres grundlag, fra den beskrevne virkelighed selv, og så dem, der henter dem andre steder fra. Faktisk er den bedste sikring af den matematiske erkendelse, at den er i overensstemmelse med intuitionen, for så vidt intuitionen selv er forankret i virkeligheden (Der findes selvfølgelig undtagelser).

Georg Rasch udtrykte noget tilsvarende, når han engang i begyndelsen af 1960'erne belærte Iven Reventlow og mig om statistikkens svære kunst: »Det, der er galt med den almindelige brug af matematik og statistik, er, at den er *præmatur*«. Og hermed mente han, at der alt for ofte, bl.a. i psykologien, blev anvendt matematiske formaliseringer, blev udført matematiske operationer, *før* man havde undersøgt, om de svarede til virkelige strukturer, det vil bl.a. sige, om de svarede til ens praktiske og begrebslige forståelse af de undersøgte fænomener.

I årene 1962 til 1966 var jeg som psykologistuderende assistent for Iven og hjalp med at registrere iagttagelser af hundestejler og på GIER-computere at teste modeller og estimere parametre for hundestejlernes opførsel (Reventlow & Mammen, 1964). Det var både sjovt og lærerigt. Men det bedste var nok vores lange diskussioner om etologi, psykologi, matematik m.m., herunder mange diskussioner med Rasch som deltager. Sidstnævnte diskussioner foregik nogle gange på Statistisk Institut, men som regel ude hos Rasch i Holte, og de var altid meget animerede og vidtfavnende, ofte med overvældende anvendelse af selvbiografisk og anekdotisk materiale.

Mange af pointerne fra diskussionerne har Iven givet en grundig og klar behandling i sin disputats (Reventlow, 1970), der tager udgangspunkt i hundestejleforsøgene, men som i høj grad også handler om mulighederne og problemerne i forbindelse med anvendelse af matematik i dyre- og humanpsykologien.

Jeg vil her fremdrage en af de mange diskussioner, som Iven, Rasch og jeg havde, og som er kort omtalt i Ivens disputats (s. 137), hvor han skriver:

*Det har et par gange været omtalt, at man kan genkende dyrene på deres adfærd. Nu kan man formodentlig ikke under iagttagelsen umiddelbart få noget indtryk af de forskellige parametre. Der er imidlertid noget, som tyder på, at man kan omskrive formlen således, at middelværdien af varighederne kommer til at stå i en relativt simpel relation til forhold vedrørende $\omega$ og $A$ (eller $\lambda$ og $\alpha$). Denne omformulering er imidlertid endu ikke gennemarbejdet. Når problemet nævnes her, gøres det blot for at pege på det interessante spørgsmål, der ligger i at finde frem til, hvilke omskrivninger af formlen en iagttager benytter ved sin umiddelbare vurdering af adfærd.*

Denne løsrevne passage kræver lidt forklaring:

Det, Iven iagttog, var bl.a. hanhundestejler, der var i brunst og svømmede rundt i et akvarium, hvor de (som regel to) hver havde et territorium og en rede. Hanhundestejlen skiftede hele tiden mellem at være ved sin rede og være væk fra sin rede, f.eks. for at markere og forsvare sit territorium. En af de ting, der blev registreret, var længden af alle de perioder, hvor fisken var ved, henholdsvis fra sin rede i løbet af en halv times iagttagelse. Det var altid Iven selv, der lavede iagttagelserne, assistenterne noterede efter Ivens diktat og passede båndoptageren.

Iven havde virkelig lært sine fisk at kende; og når han iagttog dem, så han ikke andet i lokalet. Men det gjorde fiskene, og derfor skulle alle sidde helt stille. Det endelige bevis på Ivens iagttagelsesevne blev leveret en dag, da en af fiskene åbenbart gjorde noget uventet, og Iven uden at flytte blikket fra akvariet til en af assistenterne (det var ikke mig og heller ikke festskriftets anden-redaktør!) sagde: »Per, lad være med at pille næse!« (assistentens virkelige navn tilbageholdes). Assistenten, der var grebet på fersk gerning og foreviget på båndoptageren, blev væk en uge og måtte overtales til at komme tilbage.

Længden af de perioder, fiskene tilbragte ved og fra reden, udviste ikke noget fast mønster, men fordelte sig tilsyneladende efter et mere tilfældigt mønster. Dette er jo ikke nogen uvant situation i psykologien, og intet havde været lettere end som sædvanlig blot at beregne middelværdi og spredning på de iagttagne tider m.h.p. sammenligning af »centrale tendenser« i tiderne hos forskellige fisk eller samme fisk under forskellige omstændigheder.

Men dette ville netop med Rasch's formulering være »præmaturt«. Implicit ville denne metode forudsætte en normalfordelingsstruktur i iagttagelserne, og det måtte derfor først undersøges såvel, om der var teoretiske grunde til at antage en sådan struktur, som om de iagttagne fordelinger svarede til normalfordelingsantagelsen. Ingen af delene viste sig at være tilfældet.

Den simpleste teoretiske antagelse ville derimod være, at når fisken f.eks. var ved sin rede, var der hele tiden en fast sandsynlighed $\lambda$ (lambda) for, at den ville forlade reden inden for det næste sekund. Dette ville svare til en almindelig »ventetidsfordeling«, hvor sandsynligheden for, at fisken blev mere end T sekunder ved reden, altså at den observerede tid t var større end eller lig med T, var

(1a) $P\{ t \geq T \} = e^{-\lambda T}$ (Reventlow, 1970, s. 59),

hvor middelværdien af t var $1/\lambda$.

En grafisk analyse af de iagttagne tider tydede imidlertid på, at modellen måtte forsynes med en parameter $\alpha$ (alfa), foruden $\lambda$, således at den fik følgende form

(2a) $P\{ t \geq T \} = e^{-\lambda T^{\alpha}}$ (Reventlow, 1970, s. 66).

Nu var der ikke tale om en simpel ventetidsfordeling mere, og sandsynligheden for, at fisken ville forlade reden det næste sekund, var ikke længere konstant. Kun i det allerførste sekund var denne sandsynlighed (med god vilje) lig med $\lambda$. Senere dalede den, eller voksede, alt efter om $\alpha$ var mindre eller større end 1.

Den nye model beskrev dataene bedre end den gamle, men det havde sin pris. For det første var det ikke længere let at forklare, hvad den kendsgerning, at de iagttagne tider fulgte en sådan model, overhovedet betød teoretisk. For det andet var det meget svært at forklare, hvad $\alpha$ og $\lambda$ stod for. De var vanskelige at *interpretere*. Dernæst var de meget vanskelige at sætte i forhold til den umiddelbare iagttagelse af fiskenes skiften til og fra reden. Og endelig udviste parametrene, især $\alpha$, ikke nogen systematisk afhængighed af de faktorer, som blev undersøgt i eksperimenterne.

Hvad angik interpretationen, kunne $\alpha$ til nød forklares som en slags »accelleration« i fiskenes tilbøjelighed til at skifte aktivitet. Den var desuden et »rent tal«, altså uafhængig af fysiske måleenheder. Til gengæld viste den altså ingen systematik, overhovedet.

Hvad angik $\lambda$, var det i bedste fald kun muligt at interpretere den som en sandsynlighed i det allerførste sekund af aktiviteten. Dernæst havde $\lambda$ den fysiske dimension tid$^{-\alpha}$, dvs. at den havde en variabel dimension!

Det sidste problem blev dog indirekte, dvs. af andre grunde, nemlig $\alpha$'s »tilfældighed«, løst ved endnu en ændring af modellen, således at $\alpha$ ændredes fra at være en individuel parameter til at være en fælles empirisk bestemt parameter $A = 1{,}513$ for hele populationen af fisk.

Herefter kom modellen til at se således ud

(3a) $P\{t \geq T\} = e^{-\omega T^A}$ (Reventlow, 1979, s. 69),

hvor $A = 1{,}513$.

Afløseren for $\lambda$, nemlig $\omega$ (omega), havde nu en fast dimension, nemlig enheden sekund$^{-1{,}513}$, men var ikke af den grund blevet lettere at intrepretere. At A nu var en populationsparameter i stedet for en individuel parameter som $\alpha$, gjorde den heller ikke mere intrepreterbar. Og dens relation til, hvad der kunne iagttages umiddelbart hos den enkelte fisk, var radikalt brudt. Det samme gjaldt derigennem til en vis grad $\omega$, nok noget i strid med den holdning til individ- og populationsparametre, som Rasch i øvrigt hyldede (se f.eks. Rasch, 1960).

En fordel ved $\omega$ var, at den tilsyneladende udviste en vis systematisk afhængighed af de faktorer, der blev undersøgt i eksperimentet, men altså en afhængighed, som stod i et meget indirekte forhold til iagttagelserne, og som på grund af sin uinterpreterbarhed var vanskelig at relatere til psykologisk og etologisk teori.

Men som Iven rigtigt skriver (1970, s. 136):

*Den psykologiske interpretation af matematiske udtryk afhænger af, hvilket specielt matematisk udtryk man vælger at tolke.*

Og nu er vi tilbage ved det tidligere citat.

Det er nemlig muligt at omskrive formlerne, så de bliver lettere at interpretere.

Modellens første udgave kan f.eks. skrives på følgende tre helt ækvivalente former:

(1b) $P\{t \geq T\} = e^{-\lambda T} = e^{-T/\tau} = 2^{-T/\vartheta}$,

hvor $\tau = 1/\lambda$ og $\vartheta = \ln 2/\lambda$.

(Der kan naturligvis vælges alle mulige andre »grundtal« end e og 2. Men det behandles ikke nærmere her).

Både $\tau$ (tau) og $\vartheta$ (theta) måles i dimensionen tid, dvs. enheden sekunder. $\tau$ er fordelingens middelværdi, og $\vartheta$ er dens *median*, altså den værdi, hvor sandsynligheden for, at tiden er længere, eller kortere, begge er ½. Hvis et stort antal fisk, der følger samme fordeling, altså med samme $\vartheta$, starter samtidig med at være ved reden, vil netop halvdelen af dem stadig være ved reden efter $\vartheta$ sekunder. Med andre ord er $\vartheta$ altså »halveringstiden« for fordelingen, jfr. det tilsvarende begreb for radioaktive isotopers henfald.

Hvis vi har en lang række målinger af den samme fisks ophold ved reden, vil halvdelen af tiderne være kortere end $\vartheta$ og halvdelen længere end (eller lig med) $\vartheta$.

Det viser sig nu, at modellens anden udgave også kan omskrives på denne måde

(2b) $$P\{t \geq T\} = e^{-\lambda T^{\alpha}} = e^{-(T/\tau)^{\alpha}} = 2^{-(T/\vartheta)^{\alpha}},$$

$$\text{hvor } \tau = \lambda^{-1/\alpha} \text{ og } \vartheta = (\lambda/\ln 2)^{-1/\alpha} = (\ln 2/\lambda)^{1/\alpha}.$$

Nu er $\tau$ ikke længere fordelingens middelværdi, så den lader vi ligge. Derimod er $P\{t \geq \vartheta\} = ½$, altså er $\vartheta$ stadigvæk fordelingens *median*!

I øvrigt giver denne omskrivning af formlen også mulighed for en vis interpretation af $\alpha$, eller i hvert fald en ret enkel kobling til den iagttagne fordeling. Hvis nemlig $\vartheta'$ er den værdi, for hvilken $P\{t \geq \vartheta',\} = 1/4$, altså den teoretiske værdi for fordelingens øverste kvartil, så er $\log(\vartheta'/\vartheta) = \log 2/\alpha$. Eller med andre ord, hvis $\alpha = 1$, så er $\vartheta' = 2\,\vartheta$, hvis $\alpha > 1$, er $\vartheta' < 2\vartheta$, og hvis $\alpha < 1$, er $\vartheta' > 2\vartheta$. Hvis $\alpha = 1$, er fordelingen med andre ord »uaccellereret«, dvs. at efter henholdsvis 1, 2, 3 etc. gange »halveringstiden« $\vartheta$, er der henholdsvis 1/2, 1/4, 1/8 etc. »tilbage« af fordelingen. Hvis $\alpha > 1$, går »reduktionen« hurtigere. Hvis $\alpha < 1$, går »reduktionen« langsommere.

Hvis vi endelig ser på modellens tredje udgave (og udelader $\tau$), får vi

(3b) $$P\{t \geq T\} = e^{-\omega T^{A}} = 2^{-(t/\vartheta)^{A}},$$

$$\text{hvor } \vartheta = (\ln 2/\omega)^{1/A}, \text{ og hvor } A = 1{,}513.$$

Igen er $\vartheta$ fordelingens *median*.

Altså er $\vartheta$ en parameter, som har den samme faste kobling til den iagttagne fordeling, uanset hvilken af de tre modeller der vælges!

Lad os opsummere egenskaberne ved parameteren $\vartheta$:

1. I modsætning til $\lambda$ og $\omega$ har $\vartheta$ den fysiske dimension *tid*, og måles altså i samme enheder som de iagttagne tider.
2. $\vartheta$ kan interpreteres som den tid, hvor der er 50% sandsynlighed for, at fisken har afbrudt sin aktivitet. For fisk med ikke alt for forskellige $\alpha$'er, eller under forudsætning af konstant $\alpha = A$, vil et lille $\vartheta$ betyde stor tendens til af afbryde aktiviteten og omvendt et stort $\vartheta$ betyde lille tendens til at afbryde aktiviteten.

   En direkte kobling til en simpel biologisk mekanisme er ikke helt så ligetil i to-parameter-modellen som i ét-parameter-modellen ($\alpha = 1$), hvor halveringstiden $\vartheta$ svarer til en konstant tendens eller sandsynlighed pr. sek. $\lambda = \ln 2/\vartheta$ for at afbryde aktiviteten.

   Derfor har $\vartheta$ ikke en meget simpel psykologisk eller biologisk interpretation for variabel $\alpha$, men er dog som et adfærdsmål rimeligt forståeligt og kommunikerbart og for store forskelle i $\vartheta$ og små forskelle i $\alpha$ også et rimeligt godt sammenligningsgrundlag for forskellige fordelinger.

   Under forudsætning af konstant $\alpha = A$, kan $\vartheta$ måske endda tolkes som fiskenes indre (men betinget af hele situationen) »tidsmåleenhed« eller »biologiske ur«, idet alle fordelinger bliver identiske, hvis t måles i »$\vartheta$-enheder«.

   I alle tilfælde er $\vartheta$ langt mindre »kryptisk« end $\lambda$ og $\omega$.
3. Det må formodes, at en af de egenskaber ved en fordeling af iagttagne tider, som kan perciperes direkte af iagttageren, uafhængigt af beregninger, netop er fordelingens »niveau«, forstået som dens gennemsnitstid eller dens fraktiler. Som median i fordelingen vil $\vartheta$ enten selv være en sådan egenskab eller i hvert fald korrelere ganske kraftigt med den.

   Der kan derfor tænkes en god forbindelse mellem $\vartheta$ og den mere intuitive iagttagelse, som selvfølgelig også kan »opdrages« med øvelsen.
4. Det er en fordel ved $\vartheta$ frem for $\lambda$ og $\omega$, at den svarer til en veletableret og kommunikerbar parameter for en iagttagen fordeling, nemlig medianen.
5. Ved adgang til et dataanlæg lader alle parametrene $\alpha$, $\lambda$, $\omega$ og $\vartheta$ sig lige let estimere ud fra en given indtastet fordeling. Men $\vartheta$ kan faktisk estimeres uden en eneste regneoperation, blot ved at notere de iagttagne tider og dernæst tælle sig frem til den eller de midterste, begyndende med de korteste eller de længste. (Hvis man noterer sig den øverste kvartil, kan man endog med en lommeregner få et hurtigt bud på $\alpha$, jfr. at $\log(\vartheta'/\vartheta) = \log 2/\alpha$).

   Denne estimation »på stedet« muliggør et mere effektivt forhold mellem »eksperimenttid« og »beregningstid«.

   I øvrigt viser beregninger på bilagsmaterialet (Reventlow, 1970, s. 206 f) særdeles god overensstemmelse mellem $\vartheta = (\ln 2/\lambda)^{1/\alpha}$ og fordelingernes empiriske medianer. ($\vartheta$ og de empiriske medianer varierer fra ca. 4 sek. til ca. 180 sek.).

6. $\vartheta$ kan som fordelingens teoretiske median estimeres ved fordelingens empiriske median uafhængigt af, om det antages, at $\alpha$ er konstant lig med A eller ej. En tilsvarende uafhængighed gælder ikke for estimation af $\lambda$ og $\omega$.

7. Det er ikke undersøgt direkte, om estimatet for $\vartheta$ varierer systematisk afhængig af de faktorer, der undersøges i eksperimenterne. Imidlertid ser det ud til, at estimatet for $\omega$ varierer systematisk. Da yderligere de teoretiske værdier, altså parametrene $\vartheta$ og $\omega$, er fast forbundne via formlen $\vartheta = (\ln 2/\omega)^{1/A}$, kan det formodes, at estimatet for $\vartheta$ også varierer systematisk afhængig af de faktorer, der undersøges i eksperimenterne.

Det er muligvis pkt. 7, Iven har tænkt på, når han i det tidligere anførte citat siger, at omformuleringen ikke er gennemarbejdet. (I øvrigt er jeg sikker på, at han i citatet mener »medianen«, hvor han skriver »middelværdien«).

De andre punkter blev derimod både gennemarbejdet og diskuteret med Rasch m.h.p. omformulering af modellen. Men han holdt nu på sit. Og derved blev det.

Jeg forsøgte mig med nogle mere tekniske argumenter vedrørende estimationsmetoderne, som havde at gøre med dimensioner og invarianser i estimater og parametre, men det hjalp ikke.

Ganske vist fik vi senere, også på dette punkt, medhold af Benny Karpatschof i hans opposition til Ivens disputats, og yderligere i Bennys skrift om »Skalainvariante sandsynlighedsmodeller« (Karpatschof, 1971), som rummer en dybtgående diskussion af de her behandlede problemer.

På trods af alle Rasch's rigtige principper om at respektere strukturen i datamaterialet m.v. havde han tilsyneladende ført os væk fra den virkelighed, der skulle undersøges. Men hvorfor?

En af grundene var måske, at udtrykkene med $\alpha$ og $\lambda$ var matematisk bekvemme og gjorde den teoretiske udvikling af estimater for parametrene ud fra momenter (in casu middelværdi og spredning) i fordelingen af log t enkel. Og tilsvarende for $\omega$.

Dette kunne imidlertid ikke være et principielt argument, da estimater (herunder deres varianser og kovarians) for $\vartheta$ og $\alpha$ let kunne udledes fra estimater for $\lambda$ og $\alpha$. Og tilsvarende for $\vartheta$ og $\omega$.

Måske drejede striden sig i virkeligheden om et centralt begreb ved interpretation af modellen, nemlig *intensitetsfunktionen*, dvs. sandsynligheden for, at fisken forlader reden det næste sekund, givet den stadig er ved reden efter T sekunder.

Intensitetsfunktionen er altså et udtryk for den *tendens*, fisken hvert øjeblik har til at forlade reden, hvad enten den faktisk gør det eller ej. (Tilsvarende naturligvis, når fisken er væk fra reden).

Intensitetsfunktionen tillader altså en interpretation af en iagttagen fordeling i termer af en bagvedliggende tendens, »spænding« eller måske »motivation« som funktion af tiden.

Matematisk kan intensitetsfunktionen defineres ved

$$i(T) = -d \ln P\{ t \geq T \} / dT,$$

og vi får altså for de tre forskellige udgaver af modellen henholdsvis

$$(1c) \qquad i(T) = \lambda \qquad = \ln 2/\vartheta,$$

$$(2c) \qquad i(T) = \lambda \cdot \alpha T^{\alpha - 1} \qquad = \ln 2/\vartheta \cdot \alpha (T/\vartheta)^{a - 1},$$

$$(3c) \qquad i(T) = \omega \cdot A \cdot T^{A - 1} = \ln 2/\vartheta \cdot A \cdot (T/\vartheta)^{A - 1}.$$

Ligning (1c) beskriver den simple »ventetidsfordeling« med konstant intensitet $\lambda$ (se Rasch, 1960, s. 39).

Ligning (2c) beskriver to-parameter-modellen, hvor intensiteten er en voksende funktion af T for $\alpha > 1$ og en faldende funktion for $\alpha < 1$, altså som tidligere sagt henholdsvis en positivt og negativt »accellereret« fordeling. Det ses, at for $\alpha = 1$ er intensiteten konstant, lig med $\lambda$ eller $\ln 2/\vartheta$.

Ligning (3c) beskriver modellen med fast $\alpha = A = 1{,}513$, altså en fordeling med voksende intensitet eller fast »positiv accelleration«.

Udtrykkene til venstre for det andet lighedstegn i de tre ligninger definerer intensiteten i termer af parametrene $\lambda$ eller $\omega$ og $\alpha$ eller A.

Udtrykkene til højre definerer intensiteten i termer af parametrene $\vartheta$ og $\alpha$ eller A.

Udtrykkene til venstre og til højre er selvfølgelig kvantitativt ækvivalente, men Rasch foretrak altså dem til venstre og vi andre dem til højre. Men hvorfor?

Jeg tror, at Rasch foretrak venstresiderne, fordi de set som *rene matematiske udtryk* var simplere og mere elegante end højresiderne, og fordi venstresiderne i (2c) og (3c) som matematiske udtryk var i tydelig familie med, eller en »generalisation« af, det konstante $\lambda$ i »ventetidsfordelingen« (1c).

Når Iven og jeg foretrak højresiderne, var det, i forlængelse af alle de tidligere anførte grunde, fordi højresiderne i det mindste var meningsfulde som *fysiske udtryk*, så at sige, hvilket ikke gjaldt for venstresiderne. En fysiker ville korse sig over det dimensionsmæssige »snask«, der karakteriserer venstresiderne i (2c) og

(3c) og alene derfor på forhånd sige, at $\lambda$ og $\omega$ her var uinterpreterbare i forhold til den fysiske virkelighed.

Intensitetsfunktionen i (T) har altid dimensionen tid$^{-1}$, ligesom $\lambda$ i (1c), der ikke er svær at interpretere. Men i (2c) og (3c) har $\lambda$ pg $\omega$ nu pludselig som tidligere nævnt fået dimensionerne henholdsvis tid$^{-\alpha}$ og tid$^{-1,513}$, hvor $\alpha$ er et »rent tal«.

Højresiderne, derimod, er i hvert fald *simple dimensionsmæssigt*, idet $\alpha$ stadig er et »rent tal« og $\vartheta$ har dimensionen tid til alle tre udgaver af modellen.[1]

Men i øvrigt ser det ikke ud til, at intensitetsfunktionen er det eneste grundlag for interpretationen af modellen og parametrene.

Når den er nævnt her, er det fordi uenigheden om dens formmæssige definition meget godt illustrerer en forskel på en »rent matematisk-statistisk« og en mere »fysisk« holdning til formlerne, hvor den sidste holdning gennem sit krav om *dimensionsmæssig orden og klarhed* er en påmindelse om, at enhver troværdig beskrivelse, også en matematisk afbildning af virkeligheden, altid både er kvantitativ og *kvalitativ*, og at beskrivelsen bliver virkelighedsfjern, hvis der ses bort fra det kvalitative.

Tiden er nu inde til at give en sammenfatning af egenskaberne ved $\vartheta$-modellen, som samtidig forsøger en *almengørelse* og dermed indirekte opstiller en række *idealkrav* til en parameter (jfr. de tidligere 7 punkter):

1. $\vartheta$ er en *kvantitet* i den samme *kvalitet* (nemlig tiden) som iagttagelserne.
2. $\vartheta$ kan *intrepreteres* i relation til de *begreber*, hvori det undersøgte dynamiske system forstås (nemlig enten tendenser til ændring af aktivitet eller et »biologisk ur«) og kan derfor bruges til *sammenligning* mellem dynamiske enheder (individer under forskellige betingelser).
3. $\vartheta$ er tæt koblet til eller *korresponderer* med de *umiddelbare iagttagelser*, men giver et mere præcist og stabilt billede end disse.
4. $\vartheta$ beskriver en relativt *simpel* og *kommunikerbar* egenskab ved sættet af iagttagelser (nemlig fordelingens median).
5. $\vartheta$ kan umiddelbart estimeres uden avancerede hjælpemidler. Dvs. at der kan dannes et *skøn* på stedet (som evt. kan følges op af beregninger, om nødvendigt).
6. $\vartheta$ kan både defineres og estimeres ud fra et *enkelt individ* uafhængigt af antagelser om populationsparametre (altså uafhængigt af, om $\alpha$ = A).
7. $\vartheta$ må formodes at vise en *systematisk afhængighed* af andre faktorer i det undersøgte dynamiske system.

I det behandlede tilfælde ser det ud til, at der er en bemærkelsesværdig parallellitet i opfyldelsen af kravene. Tilsyneladende konkurrerer kravene ikke, men »hjælper« hinanden.

Dette er næppe noget tilfælde (bortset fra, at vi har været specielt heldige i pkt. 5), men hænger sammen med, at alle kravene har at gøre med afbildninger af den samme dynamiske egenskab ved det undersøgte system.

Selvfølgelig kan man komme i situationer, hvor opfyldelsen af nogle af kravene, f.eks. pkt. 7, kommer i strid med nogle af de øvrige, som må opgives. Fra fysikken kendes også eksempler, hvor ikke alle kravene er opfyldt.

Men netop disse eksempler har tydeligt illustreret, at det i en sådan situation er nødvendigt med en grundlæggende diskussion af forholdet mellem de *teoretiske* begreber, de *praktiske* operationer og den *intuitive* forståelse. Den matematiske eller kvantitative beskrivelse fremprovokerer en begrebsmæssig eller kvalitativ diskussion og afklaring.

Og sådan skal det være, selv om det er besværligt og kræver tålmodighed.

Så vidt jeg ved, er Iven Reventlows disputats enestående i dansk psykologi ved sin grundige diskussion af disse problemer. Samtidig illustrerer den også, hvor store vanskeligheder et sådant arbejde står over for, der dels er et tværvidenskabeligt pionerarbejde (humanpsykologi, etologi og matematik), dels både er empirisk og teoretisk, og ikke mindst forudsætter et samarbejde mellem forskere, hvoraf ingen ønsker at springe over, hvor gærdet er lavest.

Mit fremdragne eksempel skulle gerne illustrere, at en konsekvent videreførelse af de principper, som lå til grund for dette samarbejde, ikke fører ud i virkelighedsfjern »matematiseren«, men tværtimod peger frem mod en virkelighedstro afbildning af fænomenerne, der på én gang er praktisk, intuitiv, kommunikerbar og teoretisk meningsfuld.

## Note

1. Der ligger ikke i ovenstående en påstand om, at fysiske *udtryk* ikke kan have variabel dimension, eller at en i sig selv dimensionsløs parameter (som $\alpha$) ikke kan være en dimensionsvariabel.
   Men en forudsætning for, at et fysisk udtryk éntydigt kan specificere sin (evt. variable) dimension, er at selve de basale indgående *parametre* har fast dimension.

## Referencer

Arbib, M.A.: *Brains, machines and mathematics.* N.Y.: McGraw-Hill, 1964.

Crossley, J.N. *et al.*: *What is mathematical logic?* London, Oxford, N.Y.: Oxford University Press, 1972.

Dantzig, T.: *Tallet, videnskabens sprog*. København: Gyldendal, 1964 (eng. udg. 1959).

Dreyfus, H.L.: *What computers can't do. Revised edition. The limits of artificial intelligence*. N.Y.: Harper, 1979.

Hem, L.: *Empiriproblemet*. København: Rhodos, 1980.

Karpatschof, B.: *Skalainvariante sandsynlighedsmodeller*. Psykologisk Skriftserie nr. 1. København: Psykologisk Laboratorium, Københavns Universitet, marts 1971.

Klix, F.: *Erwachendes Denken. Eine Entwicklungsgeschichte der menschlichen Intelligenz*. Berlin (DDR): Deutsche Verlag der Wissenschaften, 1980.

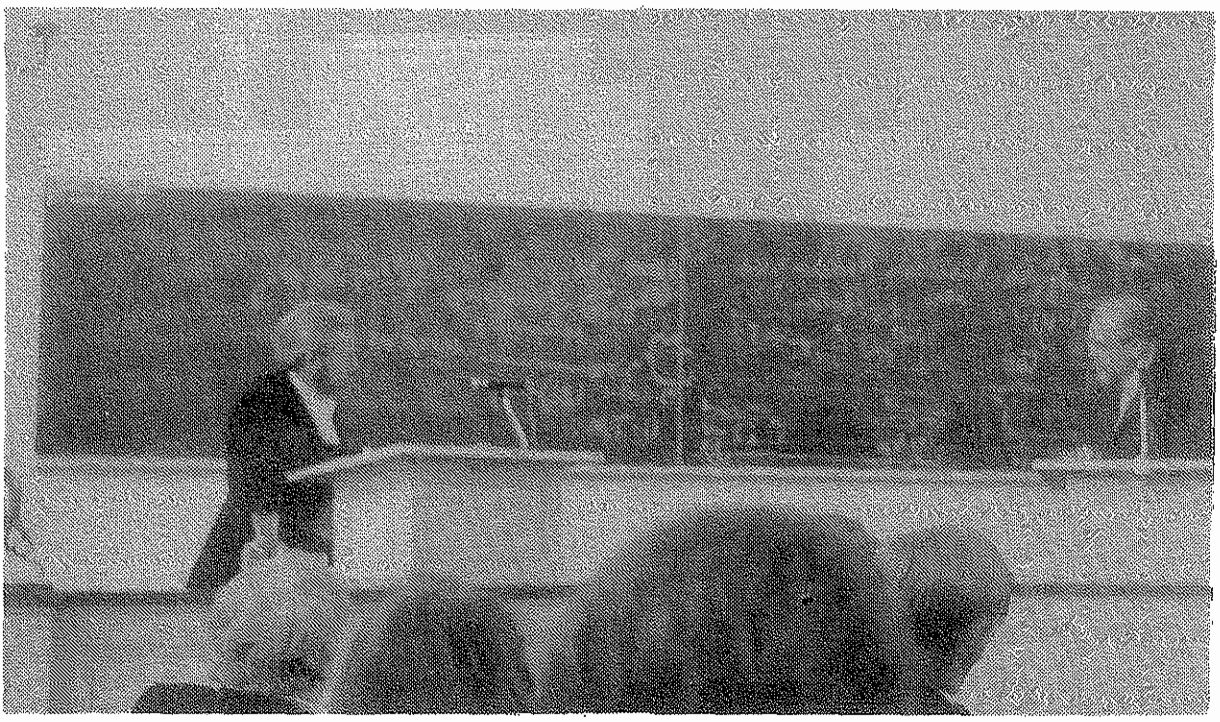
Mammen, J.: Menneskets bevidsthed. I: Fenger, O. & Jørgensen, S. (red.): *Skabelse, udvikling, samfund. En forelæsningsrække*. Acta Jutlandica LX. Samfundsvidenskabelig serie 16. Århus: Arkona, 1985, s. 73-81 og 271.

Pascal, B.: *Tanker*. København: Gyldendal, 1974 (opr. udg. på fransk, posthumt, 1670).

Rasch, G.: *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. København: Danmarks Pædagogiske Institut, 1960.

Reventlow, I.: *Studier af komplicerede psykobiologiske fænomener*. København: Munksgaard, 1970.

Reventlow, I. & Mammen, J.: Program for estimation in a stochastic model for time observations and testing data fitness. Duplikeret, 1964.



Fra disputatshandlingen 14. april 1970: Præses og den uofficielle opponent professor, dr.phil. Georg Rasch - lidt ude af fokus - under diskussion af tolkningen af en grafisk afbildning - som heller ikke kan ses. Præses har senere fortalt, at det ærgrede ham forfærdeligt, at han ikke kunne trænge igennem opponentens talestrøm med sin replik - forberedt til imødegåelse af en sådan kritik - at konklusionen var foretaget efter grundige overvejelser i samråd med hans statistiske konsulent - professor Georg Rasch! (Foto Jens Mammen.)